

Определение второй компоненты матрицы аэрозольного рассеяния по наземным измерениям поляризованного излучения в альмукантарате Солнца методом Монте-Карло

Ухинов С. А., Чимаева А. С.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
Новосибирский государственный университет; sau@sscc.ru

Введение. Рассматривается процесс переноса поляризованного излучения в рассеивающей и поглощающей среде. Существуют разные способы описания поляризационных свойств света. Наиболее распространенным и удобным является способ, предложенный Дж. Г. Стоксом в 1852 г., которым мы и воспользуемся. Он ввел четыре параметра: I, Q, U, V , имеющие размерность интенсивности, которые определяют в совокупности интенсивность, степень поляризации, плоскость поляризации и степень эллиптичности излучения. Мы будем рассматривать их как компоненты вектор-параметра Стокса $\Phi = (I, Q, U, V)^T$ в четырехмерном функциональном пространстве. При этом для параметров Стокса справедливы следующие соотношения: $I \geq 0$, $I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2$. Отметим, что для естественного света $Q = U = V = 0$. Для эллиптически поляризованного света $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$.

Для стационарных задач компоненты стоксовских вектор-функций зависят от пяти переменных: $\Phi = \Phi(x)$, $x \in X$, где $X = R \times \Omega$, $R \subseteq \mathbf{R}^3$ – пространство координат, $\Omega = \{\omega \in \mathbf{R}^3 : |\omega| = 1\}$ – пространство единичных векторов направлений. Математическая модель переноса поляризованного излучения строится на основе феноменологического предположения о том, что в результате рассеяния ассоциируемый с “фотоном” вектор Стокса преобразуется заданной матрицей рассеяния (см., например, [3]).

Рассмотрим стационарное интегро-дифференциальное векторное уравнение переноса поляризованного излучения:

$$\omega \nabla \Phi + \sigma \Phi = \int_{\Omega} \sigma_s P(\omega', \omega, r) \Phi(r, \omega') d\omega' + \mathbf{f}_0(r, \omega),$$

или $\mathbf{L}\Phi + \sigma\Phi = \mathbf{S}\Phi + \mathbf{f}_0$, где σ_s – сечение(коэффициент) рассеяния, $\sigma = \sigma_s + \sigma_c$, σ_c – сечение поглощения; \mathbf{f}_0 – вектор-функция источника излучения, $P(\omega', \omega, r)$ – матричная функция рассеяния, которая определяется соотношением $P(\omega', \omega, r) = L(\pi - i_2)R(\omega', \omega, r)L(-i_1)$, где L – специальная матрица поворота, $R = \{r_{ij}\}$ – матрица рассеяния [3]; i_1 – угол между плоскостью ω', s и плоскостью рассеяния ω, ω' ; i_2 – угол между плоскостью рассеяния ω, ω' и плоскостью ω, s ; s – вектор локальной сферической системы координат. В случае изотропной среды матрица рассеяния

имеет вид: $R(\mu, r) = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & -r_{43} & r_{44} \end{pmatrix}$, где $\mu = (\omega', \omega)$ – косинус угла

рассеяния. Если рассеивающие частицы являются однородными сферами, то $r_{11} = r_{22}, r_{12} = r_{21}, r_{33} = r_{44}, r_{34} = r_{43}$ и, таким образом, матрица рассеяния определяется четырьмя компонентами. При наличии в среде молекулярного и аэрозольного типов рассеяния матрица рассеяния R представляется как средневзвешенное от соответствующих матриц R_m и R_a : $R(\mu, r) = (R_a(\mu, r)\sigma_a(r) + R_m(\mu)\sigma_m(r))/(\sigma_a(r) +$

$\sigma_m(r)$), где σ_a, σ_m – сечения соответственно аэрозольного и молекулярного рассеяния, $\sigma_s = \sigma_a + \sigma_m$.

1. Постановка задачи и условные обозначения. В атмосферной оптике рассматривается задача восстановления индикатрисы рассеяния атмосферы $r_{11}(\mu)$ по наземным наблюдениям яркости неба в альмукантарате Солнца, то есть в различных направлениях ω_i , составляющих с зенитом тот же угол θ_s , что и направление на Солнце [1, 4, 5].

В настоящей работе ставится задача восстановления второй компоненты $r_{12}(\mu)$ матрицы рассеяния по наблюдениям вектора Стокса в альмукантарате Солнца. Разработаны алгоритмы восстановления $r_{12}(\mu)$, алгоритм вычисления матриц Якоби операторов перехода построенных методов и проведены вычисления для различных параметров среды и численное исследование сходимости методов.

Заметим, что для решения конкретной задачи нужно иметь, наряду с наблюдениями вектора Стокса, соответствующие оптические параметры (толщи поглощения, аэрозольного и молекулярного рассеяния, альбеда подстилающей поверхности) на момент проведения эксперимента. В дальнейшем изложении будем предполагать эти параметры известными.

Наблюдение ведется с поверхности Земли в K направлениях ω_i^* , каждое из которых задается зенитным углом θ_s и азимутальным углом φ_i : $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_K) = (0, \varphi_2, \dots, 180)$. Таким образом, первое из этих направлений обращено к Солнцу $\omega_1^* = -\omega_s$. Обозначим $\theta_1, \dots, \theta_K$ – углы однократного рассеяния, т.е. θ_i – это угол между i -тым и первым направлением: $0^\circ = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_K = 2\theta_s < 180^\circ$.

Пусть g – вектор узловых значений второй компоненты матрицы рассеяния: $r_{12}(\mu) = \frac{\sigma_a}{\sigma_s} r_{12,a}(\mu) + \frac{\sigma_m}{\sigma_s} r_{12,m}(\mu)$; $r_{12,m}(\mu) = -\frac{3}{8}(1 - \mu^2)$ – вторая компонента известной молекулярной (рэлеевской) матрицы рассеяния, $r_{12,a}(\mu)$ – искомая вторая компонента аэрозольной матрицы рассеяния, построенная по вектору значений $\{g_i\}_{i=1}^K$; $F_i(g) = (F_{1,i}, F_{2,i}, F_{3,i}, F_{4,i})$ – вектор Стокса в направлении наблюдения ω_i ; $F_i(g) = F_i^{(1)}(g) + F_i^{(2)}(g) + F_i^{(A)}(g)$; $F_i^{(1)}(g)$ – вектор Стокса однократно рассеянного излучения; $F_i^{(A)}(g)$ – вектор Стокса “подсветки” подстилающей поверхностью; $F_i^{(2)}(g)$ – вектор Стокса многократно рассеянного излучения при нулевом альбеде A ; F_i^* – измеренный вектор Стокса.

Однократно рассеянное излучение вычисляется аналитически, т.к. во всех направлениях наблюдения атмосферная толща одинакова: $F_{1,i}^{(1)} = Cr_{11}(\mu_i)$, $F_{2,i}^{(1)} = C \cos 2i_2(\mu_i)g(\mu_i)$, $F_{3,i}^{(1)} = C \sin 2i_2(\mu_i)g(\mu_i)$. Здесь i_2 – угол между плоскостью рассеяния $-\omega_i, -\omega_s$ и плоскостью ω_i, s ; $s = (0, 0, 1)$, $\mu = (\omega_s, \omega_i)$. $\cos i_2(\mu_i) = -\frac{\cos \theta_s}{\sin \theta_s} \sqrt{\frac{1-\mu_i}{1+\mu_i}}$; $C = \mu_0^{-1} \tau_s \exp(-\frac{\tau}{\mu_0})$, где $\mu_0 = \cos \theta_s$ – параметр альмукантарата, τ – полная оптическая толщина атмосферы, то есть $\tau = \int_0^H \sigma(z) dz$, τ_s – оптическая толщина атмосферы по-рассеянию, H – высота атмосферы.

Методы решения Следующие алгоритмы были построены на основе методов восстановления индикатрисы рассеяния, предложенных в работах [1, 4, 5].

Аддитивный метод:

$$g_i^{(k)} = \frac{F_i^* - F_i(g^{(k-1)}) + g_i^{(k-1)} C \cos 2i_2(\mu_i)}{C \cos 2i_2(\mu_i)} = G_{ad}(g^{(k-1)}).$$

Модифицированный аддитивный метод :

$$g_i^{(k)} = \frac{F_i^* - F_i(g^{(k-1)}) + q_i \sqrt{(F_{2,i}^{(1)}(g^{(k-1)}))^2 + (F_{3,i}^{(1)}(g^{(k-1)}))^2}}{C} = G_{ad1}(g^{(k-1)}),$$

где $q = \text{sign}(F_{2,i}^{(1)}(g^{(k-1)}) \cos 2i_2(\mu_i))$.

Комбинированный метод по второй/третьей компоненте вектора Стокса ($m=2$ или $m=3$):

$$g_i^{(k)} = g_i^{(k-1)} \cdot \frac{F_{m,i}^* - F_{m,i}^{(A)}(g^{(k-1)})}{F_{m,i}(g^{(k-1)}) - F_{m,i}^{(A)}(g^{(k-1)})} = G_m(g_i^{(k-1)}).$$

Алгоритм решения:

П. 0. По заданному вектору F^* находим начальное приближение $g_a^{(0)}$ - вектора узловых значений второй компоненты матрицы аэрозольного рассеяния:

$$g_{a,i}^{(0)} = \frac{\sigma_s}{\sigma_a C \cos 2i_2(\mu_i)} F_i^* - \frac{\sigma_m}{\sigma_a} r_{12,m}(\mu_i).$$

П. 1. Строим приближенную матрицу рассеяния и вычисляем F, F_A, F_1, F_2 . Для решения прямой задачи применяется локальная векторная оценка “по направлению” метода Монте-Карло.

П. 2. По формуле, соответствующей выбранному методу, находим следующее приближение g и полагаем $g_{a,i} = (\sigma_s g_i - \sigma_m r_{12,m}(\mu_i)) / \sigma_a$. Далее идем на П.1 и продолжаем итерации до сходимости или расходимости алгоритма.

Тестовые расчеты показали сходимость методов при определенных параметрах среды, см. Рис. 1.

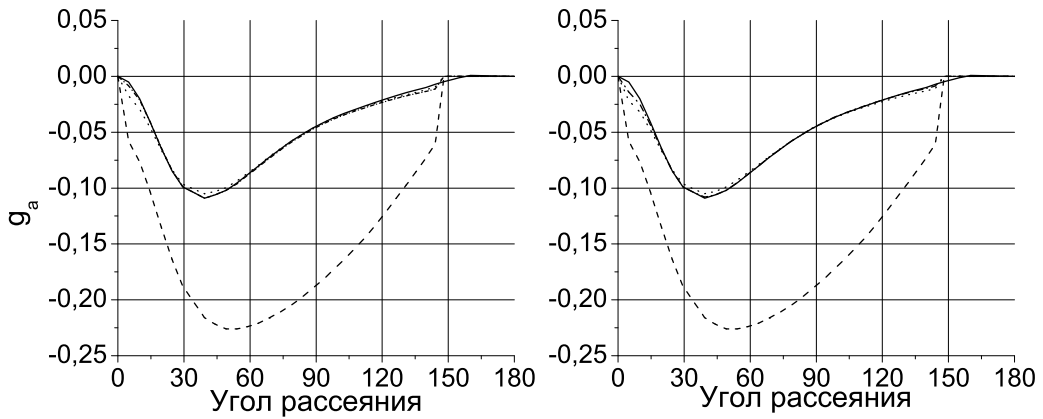


Рис. 1: Результаты расчетов комбинированным методом: по 2-ой компоненте (слева), по 3-ей компоненте (справа); — точное значение; - - - начальное приближение; ... первая итерация; - · - третья итерация; $A=0.5$, $\tau_a = 0.15$, $\tau_m = 0.05$

Известно что, для существования неподвижной точки оператора G и обоснования сходимости к ней итераций $g^{(k)}$ достаточно установить, что

Таблица 1: Спектральный радиус и норма для матриц Якоби операторов перехода итерационных методов. $\tau_m = 0.05$, $A = 0.5$

τ_a	Метод восстановления					
	Комб. m=2		Комб. m=3.		Аддитивный	
	Сп.рад.	Норма	Сп.рад.	Норма	Сп.рад.	Норма
0,5	0,957	1,503	0,875	1,524	3,856	4,266
0,3	0,953	1,235	0,653	1,799	1,821	2,002
0,15	0,868	0,967	0,701	1,630	0,907	0,983
0,05	0,856	0,898	0,762	0,786	0,414	0,460

спектральный радиус матрицы Якоби $G'(g^*)$ меньше единицы [2, 4]. Для численной проверки сходимости были получены формулы для расчета матриц Якоби оператора перехода итерационных методов. В Таблице 1 приведены результаты расчетов спектрального радиуса и нормы матриц Якоби при $\tau_m = 0.05$, $A = 0.5$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09–01–00035).

Список литературы

- [1] Антюфеев В. С., Михайлов Г. А., Лифшиц Г. Ш., Иванов А. И. Определение аэрозольных индикатрис рассеяния безоблачной атмосферы в спектральных областях $0.55 \div 2.4$ мкм. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1980. Т. 16. N 2. С. 146-155. СО АН СССР, 1988.
- [2] Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутцкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969.
- [3] Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. и др. Метод Монте–Карло в атмосферной оптике. – Новосибирск: Наука, 1976.[Engl.transl.: Springer - Verlag, 1980]
- [4] Ухинов С. А., Чимаева А. С. Обоснование сходимости для алгоритмов метода Монте-Карло восстановления индикатрисы рассеяния с учетом поляризации.// Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 2011. Т. 14. N 1. С. 101-114.
- [5] Chimaeva A.S., Mikhailov G.A., Ukhiniov S. A. Monte Carlo algorithms for reconstructing a scattering phase function with polarization taken into account // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2009. Vol. 24. N 5. P. 455-465.